

☞ 例题

Physics Cup 2020 Problem 0 (考虑到一些同学已经做过这个题目，本题不算分，热身)

供题人 Johannes Suhardjo (Indonesia/Hong Kong University of Science and Technology)

各向同性薄层电阻的性质，一般用方阻 ρ 来研究。方阻定义如下

$$\rho = \frac{1}{\sigma d}$$

其中 σ 是电导率， d 是薄层的厚度。一种直观的理解是：一个正方形边长为 l 的厚度为 d 的从两端来测量获得电阻就是“方阻”

$$R = \frac{l}{\sigma l d} = \frac{1}{\sigma d} = \rho$$

在无限大的方阻为 ρ 的平面材料上，找到两个距离为 $s \equiv |AB|$ 的两个点 A, B ，测量获得电阻 R_1 。然后我们以半径为 r ，圆形为边界的切割这个材料，圆心在 O 使得 $|OA| = |OB| < r$ 且 $\angle AOB = \theta$ 。这样在剩下的这个圆盘从两个点 A, B ，测量获得新电阻 R_2 。请求出两次测量的电阻之差 $\Delta \equiv R_2 - R_1$ 。

☞ 提示 流函数 (stream function) 可以极大的减小计算量。可以让这个题目变成简单的几何问题。考虑到电场是个三维无旋的场，所以可以用标量势表示，如果要表现一个不可压缩的矢量场 (incompressible vector field)，需要用是矢势。如果问题退化到二维的情况，后者就变成了一个标量的函数，被叫做 stream function。例如，如果我们用这种方法求液体的流动问题，那么这个东西可以用来计算液体的通量 (flux，单位时间流过的体积)。